

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

54e jaargang
1978/1979
no 1
augustus/september

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: B. Zwaneveld, voorzitter - Drs. S. A. Muller, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. W. E. de Jong - W. Kleijne - Drs. D. P. M. Krins - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.

Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, 2243 CD Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 35,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden, die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 25,—; contributie zonder Euclides *f* 15,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij Drs. G. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9II, 1078 JX Amsterdam, tel. 020-738912. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1 1/2.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, 2242 CD Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-710965.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, 4849 BD Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet leden *f* 33,50. Een collectief abonnement (6 exx. of meer is per abonnement *f* 19,50. Niet leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerst volgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,80 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

De plannen voor de 54ste jaargang

De redaktie tracht voort te gaan op de ingeslagen weg, waarbij de artikelen met didaktiek van de wiskunde en interessante wiskundige stukken elkaar afwisselen. Daarmee wil zij de gehele lezersgroep, wiskundeleraren aan alle scholen van het voortgezet onderwijs, in de aandacht houden. Zij hoopt tevens dat er binnen deze groep kollega's zullen zijn, die van hun didaktische ervaringen neerslag willen doen of hun didaktische overwegingen ter diskussie willen stellen.
De plannen voor deze jaargang hebben wat betreft de volgende punten reeds konkrete vorm aangenomen:
- er komt een speciaal examennummer
- er komt een themanummer over rekenmachientjes (zie ook blz. 34).

Verder is er een start gemaakt met het maken van een uitgebreide boekbespreking, op de manier zoals het afgelopen jaar Moderne Wiskunde voor het LBO besproken is. De neerslag hiervan is waarschijnlijk pas in de 55ste jaargang te verwachten.
Terugkijkend op het afgelopen jaar zijn er een paar opmerkingen te maken.
De twee speciale nummers (het examennummer en de uitgebreide boekbeschouwing) waren experimenten. De redaktie zou o.a. hierop graag kommentaar van u willen ontvangen.
Tenslotte vermelden we nog de goede samenwerking tussen de uitgever en de redaktie.

De redaktie

De regel van drieën, volgens Bartjens, een didactisch fossiel

JOH. H. WANSINK

1 Eenmaal was '*de regel van drieën*' een pronkstuk van ons rekenonderwijs, de spil waarom vele toepassingen draaiden. De beheersing ervan gold als een ondubbelzinnig getuigenis van rekenmeesterschap.
Tropfke constateerde in zijn 'Geschichte der Elementar-Mathematik' in 1930:

> Sicher ist dasz der jedem 'Dreisatz' zugrunde liegende logische Gedankenschlusz zu den allerersten Erkenntnisse des rechnenden Menschen überhaupt gehört.

Over de plaats van de regel van drie in de oudste rekenboeken hier te lande worden we uitvoerig ingelicht door *A. J. E. M. Smeur* in zijn proefschrift '*De zestiende-eeuwse Nederlandse rekenboeken*' (1960).

2 De regel leerde ons bij drie gegeven getallen de vierde evenredige te vinden en handelt voor ieder die met evenredigheden weet om te gaan over een eenvoudig probleem. De theorie bleef echter in het schoolse rekenen van weleer op de achtergrond en was veelal verschraald tot het aangeven van de volgorde waarin de drie gegeven getallen genoteerd dienden te worden, en tot het vermelden van de successievelijk uit te voeren bewerkingen. Motivering bleef achterwege, een bewijs van de regel van drieën werd de lezer onthouden. De behoefte daaraan was gering in een zich allereerst in dienst van een praktisch koopmanschap ontwikkelende rekenpraktijk.

3 We zullen laten zien, hoe in de befaamde '*Cijfferinge*' van *Willem Bartjens* (1569–1638) die meer dan twee en een halve eeuw lang ons rekenonderwijs zou beheersen, die regel van drieën werd geïntroduceerd. De roem van de schrijver leeft tot op de dag van vandaag voort in de uitdrukking 'volgens Bartje(n)s', waarmee men wil aangeven dat een berekening aan alle redelijke eisen voldoet. Ook het buitenland heeft rekenmeesters voortgebracht van even roemruchte reputatie, zoals we uit de zegswijzen 'according to Cocker' en 'nach Riese' mogen afleiden. *Edward Cocker* leefde van 1631 tot 1675, *Adam Riese* van 1492 tot 1559.

4 De eerste druk van Bartjens' rekenboek verscheen in 1604. In een uitgave

van de '*Cijfferinge*" van 1779, herzien door Jan van Dam en Klaas Bosch, lezen we op p. 36 het volgende (zie ook opmerking I):

> Den Regel van Dryen
>
> Word alzo genaamd om datze drie getalen begrijpt. Zet agter tegen de regter-hand't geene gij begeert te weten: ende dat hem aan de naam gelijk is zet voor tegen de linker-hand: het derde zet in de midden. Multipliceert 't getal dat tegen de regter-hand staat met het middelste getal: 't product Divideert door 't getal dat tegen de linker-hand staat, ende de uytkomst ofte product zal van zulke waarde zijn als 't minste getal in 't midden is, gelijk op het volgende voorbeeld bewesen word.

En nu volgt als model één uitgewerkt voorbeeld, namelijk:

1. Als 4 Ellen Linnen kost 9 guldens, hoeveel kost dan 16 ellen? Facit 36 guld.

elle	guld	elle		
4	9	16	2	
		9	144	36 guld
		144	44	

Proeve

elle	guld	elle		
16	36	4		
	4		144	9 guld
	144		16	

Met deze uiteenzetting moest de leerling volstaan. Ze werd voetstoots gevolgd door 99 andere opgaven van de regel van drieën.

5 In de schoolpraktijk kreeg ter vervanging van Bartjens' mechanische rekenschema de volgende methode ingang. Deze is duidelijk op een beter inzicht gericht. De verzwegen hypothese 'alle ellen zijn even duur' kan bij deze methode, die bij de Duitsers bekend staat als 'Dreisatz', gemakkelijk ter sprake gebracht worden.

4 ellen kosten 9 gulden
1 el kost $\frac{9}{4}$ gulden
16 ellen kosten $16 \times \frac{9}{4}$ gulden.

Schrijft men deze uitkomst in de gedaante

$$\frac{16 \times 9}{4}$$

dan beschikt men tevens over een redelijke verklaring voor de in de regel van drieën schematisch aangegeven rekenwijze. Maar zonder een dergelijke verklaring ontaardde de regel van drieën tot een mechanisch truukje.

Zodra het evenredigheidsbegrip voldoende tot zijn recht gekomen is, kan de in de rekenpraktijk gevolgde Dreisatz gemakkelijk plaats maken voor de volgende tweeregelige oplossing:

4 ellen kosten 9 gulden
16 ellen kosten $\frac{16}{4} \times 9$ gulden.

6 De deling van 144 door 4 in het schema van Bartjens aan de rechterkant, dreigt zonder enige nadere toelichting onduidelijk te blijven. In de 'Cijfferinge' vinden we op p. 16 in het hoofdstuk '*Divisio*' de deling van 943 door 43 (uitkomst 21, rest 40) als volgt nader toegelicht (zie ook opmerking II):

Divideerd 943 door 43. Komt 21 en Rest 40.

Om dit te doen, zo steld het Getal: 't welk te deelen is, in orden, en voegt den Deelder daar voor onder, beziet dan hoeveel maal 't eerste beeld begrepen is in zijn boven gestelde Letter, dat is, hoe veel maal 4 in 9, zo schrijft 2 achter de Streep, en zegt: 2 maal 4 is 8, getrokken van 9, rest 1, die zet boven 9, ende strijkt 9 door: zegt dan 2 maal 3 is 6, van 14 getrokken blijft 8, strijkt 14 en 3 mede door, voorts steld wederom nieuwe 43 tot Divisor, te weten, 4 onder ende 3 naast de doorgehaalde 3, werkende zo voorts tot den eynde toe.

(4
~~8~~(0
~~9~~ ~~4~~ ~~3~~ | 21
~~4~~ ~~3~~ ~~3~~
~~4~~

De kans lijkt me groot, dat deze voorlichting op de lezer in eerste instantie nog een verwarrende indruk zal maken. Voor de waardering van de methode lijkt het me gewenst er rekening mee te houden, dat ze afkomstig is uit een periode waarin gerekend werd in zand en niet op papier. De methode wordt dan ook voor ons iets doorzichtiger, als men niet overgaat tot het doorslaan van de cijfers, maar als men ze gaat uitvegen, zoals dat bij het zandrekenen te doen gebruikelijk was. Dan houdt men alleen die cijfers voor ogen die men werkelijk nog moet gebruiken.
De aangegeven delingen zijn 'stapeldelingen', die in een latere fase van de ontwikkeling van het rekenonderwijs door 'staartdelingen' konden worden vervangen. Bij deze staartdelingen noteert men de deelbewerkingen niet meer boven elkaar, maar onder elkaar.
Deze nieuwe notatie bij de deling dagtekent echter van voor 1600!

7 Voor ons, anno 1978, is het bijna onbegrijpelijk, dat het rekenen zich zo lang op het niveau dat uit bovenstaande beschouwingen naar voren komt, heeft kunnen handhaven: meer dan twee en een halve eeuw lang. De 'Cijfferinge' werd talloze malen herdrukt en opnieuw bewerkt zonder zijn karakter te verliezen en bleef in gebruik tot in de tweede helft van de vorige eeuw. *Vorsterman*

van Oyen schreef in 1868 dat de 'verbeterde Willem Bartjens' nog een vrij goed debiet bleek te vinden. In dit verband verwijzen we naar de autobiografie van *dr. F. M. Wibaut* (1859–1936), die er gewag van maakte, dat hij op negenjarige leeftijd in Vlissingen naar een nieuwe school ging waar het onderwijs niet modern was. 'Ik heb er het rekenboek gebruikt van Willem Bartje(n)s, dat toen al sterk verouderd was', aldus de auteur. Zijn getuigenis past in dat van Vorsterman van Oyen.

Jan Versluys (1845–1920) hield in 1874 een pleidooi om het werktuigelijk rekenen in onze scholen tegen te gaan. Hij constateerde, dat in de praktijk de regel van drieën neerkomt op een werktuigelijk toepassen van enige voorgeschreven bewerkingen. Hij pleitte er voor, dat leerlingen zich telkens de gronden waarop de gekozen bewerkingen berusten, bewust moeten kunnen maken.
Een halve eeuw eerder, in 1822, had *Jacob de Gelder* (1765–1848) reeds geschreven: 'Hoe velen blijven nog de regel van drieën opzetten in de onverstaanbare trant van Bartjens e.a. in plaats van zich van de schrijfwijze van de evenredigheden te bedienen'.
Het lijkt me toe, dat onder de indruk van de gerezen kritiek de regel van drieën zijn plaats in het rekenonderwijs is gaan verliezen, in ons land eerder dan hier en daar in het buitenland. In de definitie uit 'de grote van Dale' (1976), waarin de regel wordt omschreven als 'de bewerking tot het vinden van een getal als vierde term van een evenredigheid', wordt kort en bondig aangegeven wat de regel in feite inhoudt, maar we zien er tevens uit, dat we de term gevoegelijk kunnen missen. We noemen het kind bij zijn naam en spreken van vierde evenredige. Of we laten, althans in het basisonderwijs, ook deze term weg en vinden het gezochte getal op grond van proportionaliteitsoverwegingen, zoals in de reeds geciteerde drie-regelige en twee-regelige oplossingen te doen gebruikelijk is.
Voor zover ik heb kunnen nagaan heeft de term 'regel van drieën' in ons Nederlandse onderwijs van de twintigste eeuw geen rol meer gespeeld. In Duitsland is de term wat langer in zwang gebleven. Zo schreef Lietzmann (1880–1959) nog in 1933 in zijn '*Methodik des mathematischen Unterrichts*':

> Vom arithmetischen Standpunkte aus ist die Regeldetri oder der Dreisatz die wichtigste Verknüpfung der Rechenoperationen zweiter Stufe, von Multiplikation und Division. In methodischer Hinsicht kommt ihr aber eine noch grössere Bedeutung zu. Sie ist mit ihren einfachen Schlüssen eine ausgezeichnete Vorstufe für das logische Denken.

Het is echter m.i. wel duidelijk, dat de hier uitgesproken lof (ook in 1941 door *Lietzmann* nog eens herhaald) niet bedoeld is voor het mechanisch truukje waaraan de regel zijn naam ontleent, maar voor een didactisch goed gefundeerd zaakrekenen, waarin men juist de bedoelde 'regel' zelf gevoegelijk kan missen.

8 Begrip van de evenredigheidsrelatie garandeerde, dat rekenonderwijs volgens Bartjens kon uitgroeien tot boven het niveau van een ondoorzichtige rekentechniek.
In het wiskunde-onderwijs op de HBS (1863–1968) kon aan het hier bedoelde

zaakrekenen aandacht worden besteed bij de behandeling van de recht evenredige en de omgekeerd evenredige afhankelijkheid. Onder de huidige programma's van het VWO is het mogelijk de theorie te laten ressorteren onder relatie- en afbeeldingstheorie. Hierin kunnen we bijvoorbeeld een relatie $x \to f(x)$ beschouwen, waarin x het aantal meters van een bepaalde stof voorstelt en $f(x)$ het aantal guldens van de prijs.
Het gaat bij de recht evenredige afhankelijkheid om lineaire afbeeldingen, die voldoen aan de volgende voorwaarden:

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ .... additiviteitsvoorwaarde (I)
$f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ .... homogeniteitsvoorwaarde (II)

De afbeeldingen die een omgekeerd evenredige afhankelijkheid definiëren, voldoen aan de voorwaarde:

$$f(r \cdot x) = \frac{1}{r} f(x) \quad \text{.......................} \quad \text{(III)}$$

Voor gehele en voor gebroken waarden van r kunnen we II afleiden uit I, en in principe is dit ook voor irrationale waarden mogelijk.
We wijzen er echter op, dat onze leerlingen, althans een deel van hen, kans hebben later ook geconfronteerd te worden met afbeeldingen waarvoor I wel, II echter niet geldt. Een eenvoudig voorbeeld is de functie $f(z) = \bar{z}$, d.i. de functie die aan elk complex getal $a + bi$ het complexe getal $a - bi$ toevoegt.
En dan zijn er ook nog afbeeldingen waarvoor II wel en I niet geldt! In hun algemeenheid betekenen I en II dus onderling onafhankelijke voorwaarden.

Over de auteur:
De auteur is docent geweest in de didactiek van de wiskunde in Delft, Tilburg, Utrecht en Arnhem.
Hij schreef een driedelige Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren en bij gelegenheid van het tweehonderdjarig bestaan van het Wiskundig Genootschap in het Nieuw Archief: Some aspects of the development of the dutch mathematical schoolbook market from 1800 to 1940.

We laten voor de geïnteresseerde lezer hier fotokopieën volgen van de beide citaten van Bartjens' '*Cijfferinge*' uit 1779.

I

Den Regel van Dryen.

WOrd alzo genaamd / om datze drie Getalen begrijpt. Zet agter tegen de Regter-hand 't geene gy begeert te weeten; ende dat hem aan de Naam gelijk is zet voor tegen de Linker-hand: het derde zet in de midden. Multipliceert 't Getal dat tegen de Regter-hand staat met het middelste Getal: 't product Divideert door 't Getal dat tegen de Linker-hand staat/ ende de uytkomst ofte product zal van zulke waarde zijn/ als 't minste Getal in 't midden is/ gelijk by het volgende Voorbeeld bewezen word.

1. Als 4 Ellen Linnen kost 9 Guldens/ op hoe veel komt dan 16 Ellen? Facit 36 Guld.

Elle		Guld.		Elle
4	—	9	—	16
				9
				144

1
1 4 4 } 36 Guld.
4 4

Proeve.

Elle		Guld.		Elle
16	—	36	—	4
		4		
		144		

1 4 4 } 9 Guld.
1 6

II

Divideerd 943 door 43. Komt 21/ en Rest 40.

Om dit te doen, zo fteld het Getal: 't welk te deelen is, in orden, en voegt den Deelder daar voor onder, beziet dan hoe veel maal 't eerfte beeld begrepen is in zijn boven geftelde Letter, dat is, hoe veel maal 4 in 9, zo fchrijft 2 agter de Streep, en zegt: 2 maal 4 is 8, getrokken van 9, reft 1, die zet boven 9, ende ftrijkt 9 door; zegt dan, 2 maal 3 is 6, van 14 getrokken blijft 8, ftrijkt 14 en 3 mede door, voorts fteld wederom nieuwe 43 tot Divifor, te weeten, 4 onder ende 3 naaft de doorgehaalde 3, werkende zo voorts tot den eynde toe.

Divideert 8439/ door 49/ komt 172/ en Rest. 11.

(4
8 (0
9 4 3 } 21
4 3 3
4

1 (1
3 5 6 (1
8 4 3 9 } 172
4 9 9 9
4 4

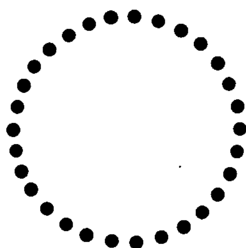
Niveaus van wiskundig handelen en lerarenopleiding

SIEB KEMME

Het onderstaande is geen methode hoe je studenten van een lerarenopleiding kunt leren om niveaus van wiskundig handelen te onderscheiden bij hun toekomstige leerlingen op school. Ik zal alleen maar wat problemen en voorbeelden geven, waarvan ik denk dat ze een startpunt zouden kunnen zijn voor verder onderzoek.

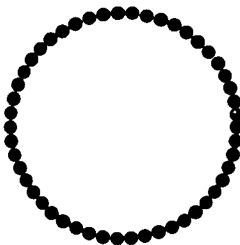
In het voorjaar van 1977 hebben we (van D'Witte Leli) het projekt 'Spionnen in de stad' (van het IOWO) uitgevoerd op een aantal basisscholen in de binnenstad van Amsterdam. Het probleem is misschien bekend: drie spionnen zijn op weg naar Amersfoort. Ze moeten nog een uur lopen. Waar kunnen ze zijn? De leerlingen beschikken over een kaart van de omgeving van Amersfoort waarop afstanden zijn aangegeven in uren gaans. De meeste leerlingen pakken een liniaal en tekenen een aantal mogelijke plaatsen op de kaart. Dan herkennen ze dat de verzameling van alle mogelijke plaatsen een cirkel is en tekenen ze deze cirkel met een passer, met Amersfoort als middelpunt en 'een uur gaans' als straal.
Behalve dat ene meisje. Ze werkt vlijtig door. En tekent steeds meer punten. Totdat ze helemaal rond is. Dan stopt ze met een gezicht van: 'ik ben klaar'.

Dit is het resultaat:



Op mijn opmerking dat de spionnen nog tussen twee punten kunnen zitten, reageert ze met: 'natuurlijk, je moet allemaal punten tekenen'.

Dit wordt het dan:



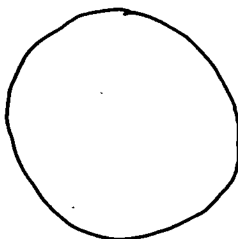
De punten zijn zorgvuldig aan elkaar vastgetekend.
Wat is er aan de hand? Waarom gebruikt zij geen passer en de anderen wel? Volgens de juf hebben ze er allemaal wel eens mee gewerkt.

Er is een duidelijk verschil in wiskundig handelen binnen de klas. Ik vond het zo opvallend en karakteristiek dat het me niet losliet en aan het denken zette. Ik heb het proberen te 'verklaren' met behulp van de 'symbool en signaal' theorie, zoals die beschreven wordt in: 'Begrip en Inzicht', van Van Hiele.

Wat verstaan wij (leraren van leraren) onder een cirkel? Een van de betekenissen is: een verzameling van punten in het vlak die een vaste afstand hebben tot een vast gegeven punt. Hiermee hebben we een karakterisering gegeven van een meetkundige figuur met behulp van woorden. Er zijn meer van dergelijke verbale karakteriseringen. Bijvoorbeeld:
Een cirkel is figuur die met behulp van een passer is gemaakt, waarbij je de punt op een vaste plaats in het papier hebt geprikt en ... (gevolgd door een volledige lijst van aanwijzingen om een cirkel met behulp van een passer te tekenen). Een ander voorbeeld:

$$\{(x, y) \mid (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2\}$$

Nu eens geen woorden, maar wel een rij van schriftelijke symbolen die zich laten lezen ('de verzameling van elementen (x, y) met de eigenschap ...').
Vraag eens een kind van 6 jaar wat een cirkel is. Mijn dochter pakte een stuk papier en tekende:



En voegde er nog aan toe: 'het heeft geen hoeken'.
Je kunt dus op totaal verschillende manieren eenzelfde figuur karakteriseren.

In het laatste geval is een cirkel alleen maar een figuur. Meer precies: het is een type van figuren (al die figuren die gesloten zijn, geen hoeken hebben, geen ei zijn, etc.).
In het allereerste geval wordt een cirkel geïdentificeerd door een verbale uitdrukking, die, in feite niets anders is dan een van de meest karakteristieke eigenschappen.
In de 'symbool en signaal' theorie wordt deze situatie heel zorgvuldig beschreven.
Bij het leerproces over de cirkel is er een toenemend aantal eigenschappen dat gekend gaat worden. Eerst is er alleen maar dit: ○

Een herkenbare (benoembare) figuur. De eigenschappen daarvan zijn vaag en zeer intuïtief (het heeft geen hoeken). Die eigenschappen spelen geen enkele rol bij het beschrijven van de figuur. Men zegt: deze figuur is een *symbool* van die eigenschappen.
De eigenschappen worden echter steeds belangrijker en beginnen zelfs een eigen leven te leiden. Bij het werken met de figuren wordt niet alleen meer op de figuur zelf gelet maar worden de eigenschappen van die figuur gebruikt. Vooral bij symmetrische figuren speelt dit een rol. Tenslotte gaan sommige eigenschappen de figuur zelfs karakteriseren. Men zegt: deze eigenschap is een *signaal* voor de cirkel.
Samengevat:
- De figuur ○ heeft een symbool karakter omdat het een symbool is voor een aantal eigenschappen.
- Een eigenschap E kan een signaal karakter hebben, omdat door E de figuur volledig wordt bepaald (als je aan E denkt, zie je de figuur al voor je).

In een wiskundig leerproces treedt er een (geleidelijke of plotselinge) verschuiving op van het symbool-achtige van een figuur naar het signaal-achtige van een eigenschap van die figuur. Altijd in die volgorde.
Zoals in ons geval van 'Spionnen in de Stad'. Voor het meisje had de eigenschap 'de punten van een cirkel hebben allemaal dezelfde afstand tot het middelpunt' geen signaal karakter. Dus tekende ze geen cirkel.
Denk erom, dit is geen leerpsychologie, er wordt geen verklaring gegeven van denkprocessen. Ik geef alleen maar een karakteristiek verschil aan in wiskundig handelen en probeer daar een verklaring voor te vinden door te letten op de betekenis van de wiskunde zoals die door leerlingen wordt ervaren.
Wat moet je hier nu mee met je lerarenopleiding? Ik zou graag willen dat studenten dit soort verschillen (en nog vele andere) in wiskundig handelen van leerlingen leren herkennen en dat ze daar op kunnen inspringen. Vooral dat laatste: vanuit een bepaalde diagnose leerstrategieën ontwikkelen die tegemoet komen aan knelpunten in een bepaalde situatie. Ik zal eerst eens een voorbeeld geven van een situatie waar studenten, wat dat laatste betreft, niets van leren.
Stel je eens voor dat in een klassesituatie (12–13 jaar) het volgende probleem ontstaat:

'Waarom is $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ gelijk aan 4?'

Je kunt daar allerlei verklaringen voor geven (in onze opleiding):

1 Omdat $\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{4 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = 4.$

2 Omdat $\frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p} \cdot \frac{p}{q}} = \frac{\frac{q}{p}}{1} = \frac{q}{p}$ voor ieder rationaal getal $\frac{p}{q} \neq 0.$

3 Omdat $A \cdot A^{-1} = 1$, dus $(A^{-1})^{-1} = A$ in een groep.

Iedere volgende verklaring staat op een wiskundig hoger niveau dan de vorige en levert zelfs een verklaring van die vorige. (3 is niet alleen een verklaring van het oorspronkelijke probleem, maar ook van 2 en dus van 1). Je zou kunnen zeggen: zo zie je hoe de groepentheorie van belang kan zijn bij de schoolwiskunde. Men noemt dat: schoolwiskunde op een hoger standpunt.
Toch ben ik pessimistisch over het resultaat voor onze studenten. Geen van de antwoorden lossen het probleem op. Het zijn alleen maar verklaringen achteraf als je al weet wat $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ betekent. Maar dat is nu juist het probleem!

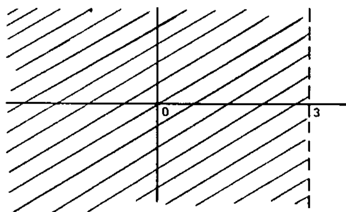
Wat is dat: 'Weten wat $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ betekent'? Wat is een breuk voor leerlingen in de brugklas? Een heleboel. Door middel van breuken kun je de verhouding weergeven van twee lengtes, je kunt het portie taart bepalen waar je recht op hebt, een fraktie is het resultaat van een deling, een punt op de getallenlijn. (Zie: Docentenhandleiding bij 'Breuken', leerstof-pakket van WISKIVON.) Dus als je je leerlingen wilt laten begrijpen wat $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ is, zul je bij *die* betekenis van breuken moeten beginnen. Alleen dan zal het begrip breuk een nieuwe, ruimere betekenis kunnen krijgen. We lopen dan niet bij voorbaat het gevaar dat we aan $\frac{1}{\frac{1}{4}}$ een formele betekenis gaan toekennen die losstaat van al het voorgaande. Onze groepentheorie geeft de student zelfs de illusie dat hij het nu volledig begrijpt en dat alle problemen zijn opgelost. Terwijl hij aan het probleem van de leerling niet eens is toegekomen. In ieder geval is het onmogelijk om vanuit deze wiskundige niveaus een goede strategie te ontwikkelen om duidelijk te maken dat $\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$
In het volgende voorbeeld geef ik een suggestie hoe je zoiets misschien beter voor elkaar zou kunnen krijgen.

Bij een les over schoolwiskunde gaven we studenten de volgende situatie beschrijving:

Op de opdracht: Teken de grafiek van $\{(x, y) \mid x < 3\}$ geeft een leerling het antwoord:



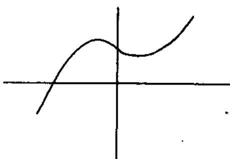
waarbij hij zich fel verzet tegen de goede oplossing:



met het argument: 'dat is een verzameling en geen grafiek'
In aansluiting hierop gaven we de volgende opdrachten:

a Wat is nu precies het verschil tussen 'verzameling' en 'grafiek'?
b Beschrijf de argumenten waarmee je vraag *a* oploste.
c Wat zou je tegen deze leerling zeggen?
d Zou dat zijn probleem ècht oplossen?

Door vraag *a* wordt de student gedwongen een oplossing op zijn eigen niveau te formuleren. Vraag *b* laat de student bewust worden van zijn eigen niveau van argumenteren. We hopen met vraag *c* een transfer op gang te brengen van dit niveau naar dat van de leerling en via vraag *d* een diskussie op gang te brengen over het waarom van dergelijke problemen in de schoolwiskunde en tegelijkertijd te kontroleren of de student bereid is zijn eigen oplossingen aan kritiek bloot te stellen.
De reakties van de studenten waren voor ons zeer verrassend. Aan de ene kant waren de antwoorden tamelijk teleurstellend, maar tegelijkertijd was het een genoegen om te zien hoe deze situatie hen bleef intrigeren. Ze namen geen genoegen met hun (gebrekkige) oplossingen. Er moest een bevredigende oplossing komen. Want dit soort problemen zullen ze dagelijks te lijf moeten. Ze 'begrijpen' de oplossing van de leerling, maar hebben geen middel om dat uit te leggen. Hierdoor ontstaat een bereidheid om zich te verdiepen in de argumenten van de leerling en zich het niveau daarvan te realiseren. Wat is een grafiek? Wat is een verzameling? Ook deze situatie laat zich met de 'symbool en signaal' theorie karakteriseren.
Voor een leerling is dit



een grafiek en dit



een verzameling. Het zijn figuren met een (beperkt) aantal eigenschappen. Die eigenschappen hebben geen signaal karakter. Daarom kan er, voor de leerling, geen begrijpelijk verband zijn tussen 'grafiek' en 'verzameling'. Omdat dat wiskundige verband loopt via het signaal-karakter van de eigenschappen. Voor deze leerling was de opdracht zinloos. Als je hem wilt helpen, dien je hem eerst wat verder op weg te helpen naar het signaal-achtige van de eigenschappen.

Je zou deze problemen 'kiespijn' problemen kunnen noemen: ze kwellen je totdat de kies verwijderd is. Dergelijke problemen moeten in ieder geval aan de volgende voorwaarden voldoen:

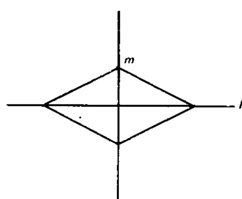
1 ze moeten een hoog werkelijkheidsgehalte hebben,
2 ze moeten verschillende niveaus van handelen in zich hebben,
3 ze dienen een duidelijk aangrijpingspunt te hebben om de student inzicht te geven in zijn eigen proces van wiskundig denken en handelen.

Tenslotte wil ik nog een moeilijkheid signaleren die zich kan voordoen bij het handelen op verschillende niveaus door studenten.
In een kursus over transformatie-meetkunde hadden we een toenemende graad van abstraktie geprogrammeerd, zodanig dat de student vanuit een 'hoger standpunt' in staat was schoolwiskunde te taxeren naar wiskundige inhoud en ook 'vertalingen' zou moeten kunnen maken naar de schoolwiskunde toe. De kursus bevatte geen theorie en demonstratie materiaal over niveaus van handelen. Het ging alleen maar om de inhoudelijke relatie tussen schoolwiskunde en wiskunde op eigen niveau. (Hoewel dat natuurlijk wel met denk/handelingsniveaus te maken heeft). In een eindtoets gaven we de volgende problemen:

A Een figuur in het vlak heeft twee loodrechte assen van symmetrie.
  Bewijs dat de figuur ook punt-symmetrisch is.

B Als een vlakke figuur puntsymmetrisch is, zijn er dan ook twee onderling loodrechte spiegelassen?

Oplossing A:



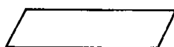
$$\left.\begin{array}{l} R_l(F) = F \\ R_m(F) = F \end{array}\right\} \text{dus } \dot{R}(F) = R_l \circ R_m(F) = R_l(F) = F$$

(R_l is spiegelen in l, $\dot{R}$ is puntspiegelen)

Bijna alle studenten gaven deze oplossing.

Heel anders lag het bij de tweede vraag.
De ene helft gaf oplossing B1:
Natuurlijk, want iedere puntspiegeling kan geschreven worden als een kom-

binatie van twee lijnspiegelingen in loodrechte assen.
De andere helft gaf oplossing B2:
Nee, want



Wat zou er aan de hand kunnen zijn? Naar wiskundige argumenten afgemeten, staat oplossing B1 op een hoger niveau dan B2.
Het lijkt wel of er een soort 'traagheid' is: als je op een bepaald niveau bezig bent, dan ben je geneigd daarop te blijven zitten. Er is een weerstand (drempel) om het niveau te verlaten. Oplossingen A en B1 staan, wat betreft de gehanteerde argumenten op hetzelfde niveau, B2 staat op een lager niveau. Door oplossing A zit je in een 'bepaalde manier van denken' en dat laat je niet zomaar los.
Dat is nu graag wat je zou willen bereiken bij een aankomend leraar: het onbezorgd heen en weer kunnen pendelen tussen niveaus. Misschien is er dan echt sprake van een transfer tussen instituuts- en schoolwiskunde.

Samengevat zou je kunnen zeggen:
- iedere leerling op school heeft zijn/haar eigen manier van werken, denken en problemen oplossen. Daar zitten niveau verschillen tussen. Die verschillen laten zich beschrijven met een aantal theorieën,
- studenten op een lerarenopleiding wil je laten kennismaken met deze niveau verschillen en theorieën,
- maar dat is niet voldoende. Ze dienen zich ook bewust te zijn van hun eigen niveaus van handelen/denken en de verschillen daarin met het leerlingen niveau,
- bovendien dient er een soort niveau 'onbezorgheid' te komen om het heen en weer pendelen mogelijk te maken. Mischien dat 'kiespijn problemen' daartoe een bijdrage kunnen zijn.

Over de auteur:

Sieb Kemme is als hoofddocent wiskunde verbonden aan de lerarenopleiding D'Witte Leli te Amsterdam.
Het bovenstaande artikel is een weergave van een voordracht van de auteur, gehouden op het congres over de problemen van de lerarenopleiding wiskunde, augustus 1977, te Pécs (Hongarije).

Leerplanontwikkeling onderweg 1

P. G. J. VREDENDUIN

In 1966 startte de CMLW met het opstellen van een nieuw programma voor wiskunde voor het vwo. Natuurlijk waren er ook programma's nodig voor het havo en het mavo. Door beperking en vereenvoudiging ontstond uit het vwo-programma het programma voor het havo. En op analoge wijze ontstond uit het havo- het mavo-programma. Daarbij werd niet in de eerste plaats eraan gedacht wat de mavo-leerling nodig heeft, maar aan de mogelijkheid voor de mavo-leerling door te stromen naar het havo. Wat de havo-leerling aan het einde van de derde klas gehad heeft, moest de mavo-leerling aan het einde van de vierde klas doorgenomen hebben. Weer een stap terug was het programma van mavo-3. Dit ontstond door enkele onderwerpen uit het mavo-4-programma te schrappen. Al spoedig werden de eisen die het lto-t (lager technisch onderwijs, theoretische richting) stelde, gelijkgeschakeld aan die voor mavo-3. Het lto-t is de richting in het lbo waarvoor kennis van exacte vakken het belangrijkst is. Voor de overige richtingen in het lbo, dus lto-p, leao, lhno, llo en lmo, werd weinig of niets gedaan.

Voor het IOWO was dit een reden zich te gaan verdiepen in de problematiek van het lbo. Hoe helpen we dit aan redelijk wiskundeonderwijs? Men zou de procedure van aftrekselvorming kunnen voortzetten en uit het programma voor het lto-t door verschraling het overige lbo van wiskunde kunnen voorzien. Deze weg sloeg het IOWO natuurlijk niet in. Men wilde juist de omgekeerde weg inslaan en nu eens van onderop beginnen. Welk wiskundeonderwijs is zinvol voor de leerlingen van het lbo? Deze vraag wilde men beantwoorden zonder in zijn achterhoofd de programma's te hebben waarover de andere schooltypes reeds beschikten. Men vroeg zich zelfs af, of men uitgaande van een aangepast lbo-programma door opstijging zou kunnen komen tot programma's voor de overige schooltypes. Anders gezegd: zouden de ervaringen bij het lbo bevruchtend kunnen werken op het wiskundeonderwijs bij mavo, havo, vwo? Voorlopig was dat een open vraag. Essentieel was, dat men aan het werk ging en materiaal ging zoeken dat geschikt is om aan leerlingen van het lbo voor te zetten.

In 1973 verscheen de lijvige brochure: Wiskunde lbo, startpunt leerplanontwikkeling, 326 bladzijden dik. Men vindt hierin een schat van mogelijkheden. De volgende fase was, dat men verschillende van deze mogelijkheden ging uitwerken. Maar met losse stukken heeft men nog geen leerplan. Er moest lijn in gebracht worden, waardoor uit deze stukken een verantwoord programma

ontstaat, voorlopig voor de eerste klas. Het IOWO noemt dit het maken van een raampjesplan.
Natuurlijk moet dit programma uitgetest worden. Dit is voor het eerst gebeurd in het cursusjaar 1976–77 aan drie scholen: een scholengemeenschap voor mavo-leao in Utrecht (gelegen aan de Gansstraat), een lts in Nijverdal en een middenschool in Heythuysen. Uiteraard is het contact met de dichtbij gelegen school aan de Gansstraat het intensiefst geweest.
Men is thans bezig met het uittesten van een programma voor de tweede klas en het uittesten van een herziene versie voor de eerste klas.

Nu de gedachte die aan de samenstelling van de cursus ten grondslag ligt. Onze alledaagse maatschappij is doordrenkt met wiskunde. Haal de wiskundige problemen hieruit, dus uit de alledaagse ervaring, alledaags in ruime zin. De wiskunde wordt dan levensecht. Men leert, min of meer spelenderwijs, de betekenis van een verscheidenheid van wiskundige begrippen kennen. Steeds in concreto; men komt dus niet tot definities of tot abstracte rekenmethoden. Er wordt geopereerd met getallen en niet met letters. Zo traint men vaardigheden, maar niet in de vorm van onbegrepen machinaal uitgevoerde regels. Wat men traint, wordt ook begrepen. Wat zo ontwikkeld wordt, is een hoeveelheid begrip die ieder nodig heeft om zich in het alledaagse leven enigszins thuis te voelen.

Allicht wordt men nieuwsgierig met welke begrippen en vaardigheden de leerling in de eerste klas in aanraking komt. Hieronder een lijstje. De volgorde correspondeert niet met de volgorde van presentatie gedurende de cursus.
breuken
decimale breuken, afronden
getallenlijn
grafieken
percentages
helling van een weg
lezen van de plattegrond van een stad
kaartlezen
de globe
afstandstabellen met twee ingangen
hoeken en richtingen (zoals noord, noordoost)
oppervlakte
ruimtefiguren (verschillende soorten lichamen)
informatie verkregen uit ponskaarten
blokschema's met vertakking in 'ja dan' en 'nee dan' en één lus
staafgrafiek
sectordiagram
het kansbegrip

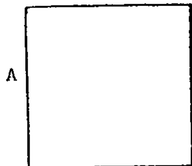
Ondoenlijk is een inzicht te geven in het volledige materiaal. Enkele voorbeelden volgen hier om de nieuwgierigheid van de lezer verder te prikkelen.
Breuken. De leerling moet begrijpen wat een breuk betekent. Daartoe zijn een

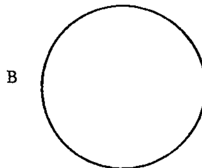
groot aantal opdrachten samengesteld. Hieronder volgen er enkele om een indruk te geven van de methode.

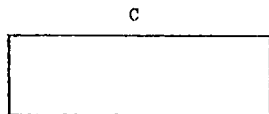
breuken en brokken

1

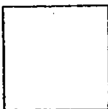
(1) Kleur van elke figuur $\frac{1}{6}$ deel.
Doe het zo nauwkeurig mogelijk.

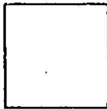
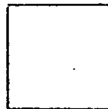
A 

B 

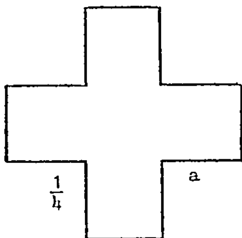
C 

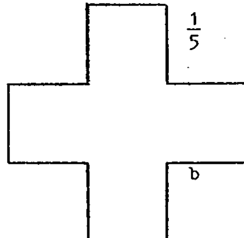
(2) Kleur van elke figuur $\frac{1}{4}$ deel. Doe het telkens anders.

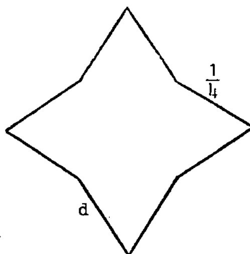


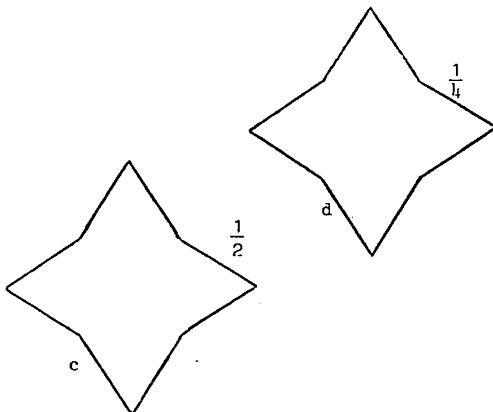



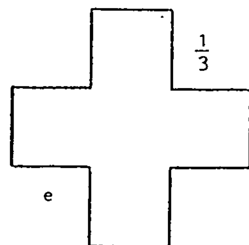

(3) Kleur steeds het deel dat is aangegeven.







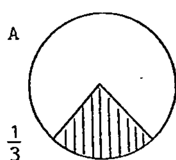




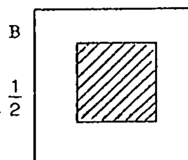
breuken en figuren 4

(11) Bekijk dit goed, want het is fout!
Maak de tekening in orde of verander de breuk.

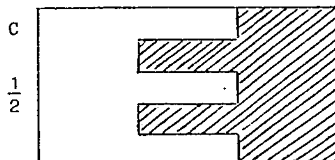
A $\frac{1}{3}$



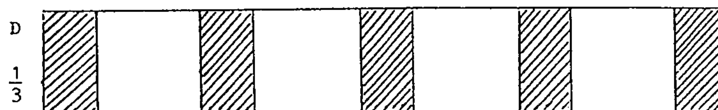
B $\frac{1}{2}$



C $\frac{1}{2}$



D $\frac{1}{3}$

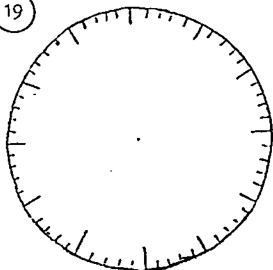


Opgave 19 is meteen een goede vooroefening voor het kunnen lezen van sectordiagrammen.
De getallenlijn wordt gebruikt voor het ordenen van de breuken en om te begrijpen dat $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Terloops worden wel eens breuken opgeteld.
In dit stadium ontbreekt nog elke systematische training in het rekenen met breuken. Men leert echter het begrip breuk in zijn vingers krijgen. Wie in een later stadium met breuken gaat rekenen, zal hier niet zo veel moeite mee hebben, omdat hij begrijpt waarover hij het heeft. En wie die training voor zijn latere leven niet nodig heeft, blijft deze nodeloze inspanning bewaard.

breuken en cirkels

19

A



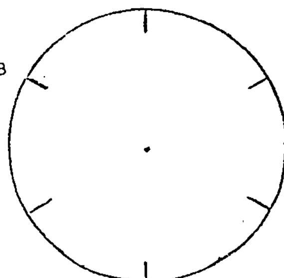
kleur $\frac{1}{3}$ deel blauw

kleur $\frac{1}{6}$ deel geel

kleur $\frac{1}{12}$ deel rood

kleur $\frac{1}{24}$ deel zwart

B

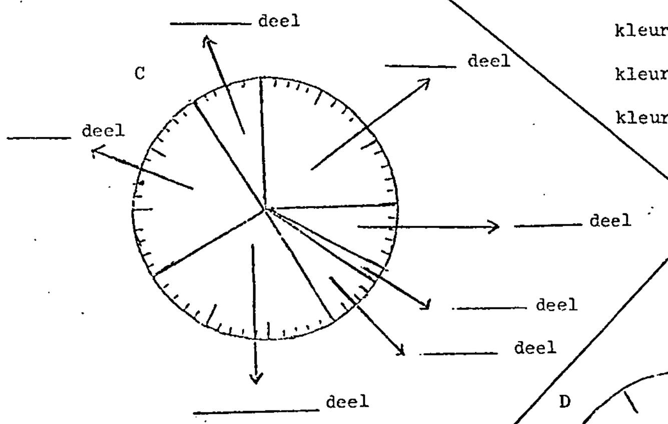


kleur $\frac{1}{3}$ deel blauw

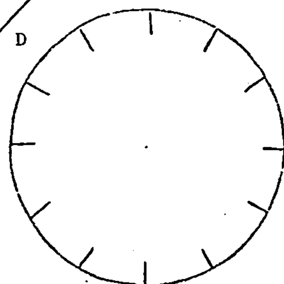
kleur $\frac{1}{6}$ deel groen

kleur $\frac{2}{12}$ deel rood

C



D



kleur $\frac{1}{3}$ deel rood

kleur $\frac{1}{4}$ deel geel

kleur $\frac{1}{5}$ deel bruin

kleur $\frac{1}{6}$ deel groen

Hoeveel is nu nog over? ______

Hoeken. Hieronder enkele opdrachten. U ziet hoe enkele onderwerpen die vroeger reeds ter sprake kwamen, gerepeteerd worden, namelijk het lezen van een blokdiagram en het schaalbegrip.

Richtingen

A3

Opdracht 2



Schaal 1:80.000

Je ziet hier een plaatje van een bosrijk gebied in Duitsland. Dit gebied ligt in de Harz. Op het kaartje kun je zien dat hier flinke heuvels zijn.
Waaraan zie je dat? ______________________________

____

Hier en daar staan uitkijktorens op de kaart aangegeven met dit tekentje ▲.
Zoek op de kaart uitkijktorens op.
We hebben er voor het gemak letters A, B en C bij gezet.
Hoe groot is de afstand tussen de torens?
Vul de afstandstabel in.

	A	B	C
A	//////		
B		//////	
C			//////

In periodes met bosbrandgevaar zijn de uitkijktorens dag en nacht bemand. Zodra een brandwacht rook of vuur ziet, waarschuwt hij de brandweer in St. Andreasberg. Deze brandweer krijgt ook meldingen van de andere torens. Op de kaart kan de brandweer dan de plaats van de brand aangeven en verdere maatregelen nemen.

De volgende meldingen kreeg de brandweer op 15 juni 1976 vroeg in de middag.

A Rook in het NO.

B Rook in het N.

C Rook in het W.

Teken op het kaartje de plaats van de brand.

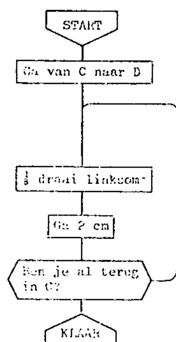
Kom je precies in één punt uit? ______________________

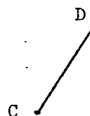
Hoe kan dat? ______________________

Draaien, om duizelig van te worden

B6

Opdracht 7





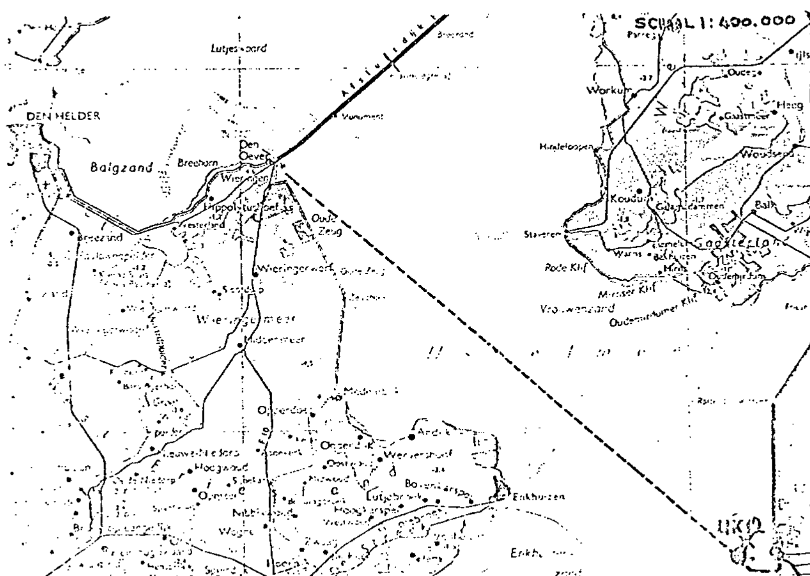
Wat voor figuur heb je nu?

____

Opdracht 9

Een verhaal.

Een Urkervisser voer op een zekere dag uit om op de Noordzee te gaan vissen. Hij had op zijn kaart de koers uitgetekend. Eerst bij Urk het IJsselmeer op manoeuvreren en dan bij ton UK 12 in één rechte lijn naar de sluizen in Den Oever. Zijn 12 jarige zoon mocht meevaren.



Na het zware manoeuvreerwerk (allemaal zandbanken en ondiepten!) ging de Urkervisser wat rusten. Hij gaf het roer over aan zijn zoon en gaf de koers op die hij op het kompas moest sturen. Ze waren toen bij de UK 12. De zoon van de Urkervisser stuurde 5^0 ten noorden van de opgegeven koers. Hij vond nauwkeurig aflezen niet zo belangrijk, want, zo dacht hij, wat is nou een hoek van 5^0.

Wat denk jij daarvan?

Teken de koers van de zoon op het kaartje.
Geef aan waar het schip uitkomt.
Hoeveel km van Den Oever komt het schip uit? (De schaal van de kaart is 1:400.000). ______

Als de vader pas halverwege zijn zoon aan het roer gelaten had, waren ze dan even ver van Den Oever uitgekomen?
Leg uit. ______

______

Kun je een voorbeeld geven waarbij een hoek 1^0 te veel of te weinig erg veel uitmaakt? ______

Wie meer informatie wil, kan veel vinden in de Wiskrant. Men vindt in Wiskrant aflevering

3 De brochure lbo
4 Schoolwerkplan 12–16 in de maak
5 Experiment met schoolwerkplan 12–16 gestart
6 Schoolwerkplan 12–16
7 idem en Leerlingenmateriaal breuken
8 Wiskunde voor afhakers, Kansrekening in onderbouw lbo, Schoolwerkplan 12–16, Procenten op de helling
9 Een jaar werken in de Gansstraat (het Gansstraatpark)
10, 11 en 12 Reis om de wereld in 80 dagen
11 Lijngrafieken in de Gansstraat

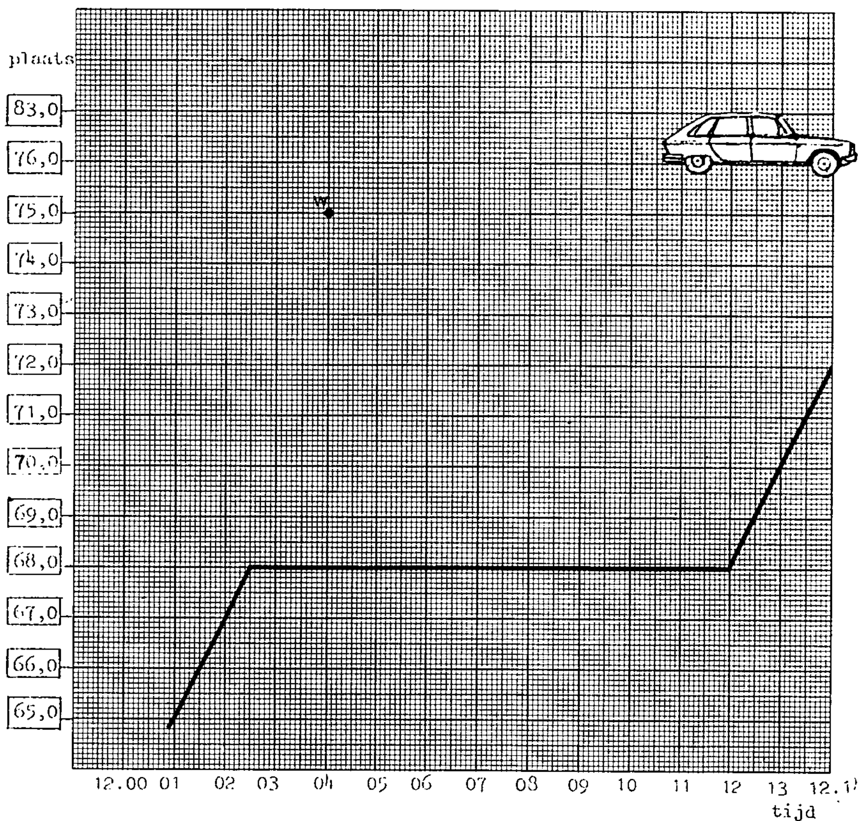
Maar de beste informatie vindt u in de onlangs verschenen brochure Leerplanontwikkeling onderweg 1.
Het verschijnen van deze brochure was aanleiding voor de redactie van Euclides speciale aandacht te besteden aan, wat men in IOWO-kringen kortweg noemt, het werk in de Gansstraat. En zo is dit artikel tot stand gekomen.
Men vindt in deze brochure in het bijzonder een uitgebreid protocol van een tweetal lessen. Deze lessen zijn op de videoband opgenomen. Ik heb deze banden gezien en zou er graag iets over willen vertellen.
De ene les heeft als lesvorm het leergesprek. De lerares, Nanda Querelle, vraagt de leerlingen een aantal onderwerpen op te noemen waarover ze informatie zouden willen hebben betreffende hun klasgenoten. Nagegaan wordt welke onderwerpen op ponskaarten verwerkt kunnen worden, dus op welke vragen men met 'ja' of 'nee' kan antwoorden. Tien vragen worden gekozen:

1 heb je telefoon thuis?
2 woon je in Utrecht?
3 houd je van pop- of soulmuziek?
4 houd je van carnavalmuziek?
5 durf je te dansen?
6 houd je van 's avonds feesten?

7 houd je van sport?
8 houd je van balspelen?
9 houd je van watersport?
10 houd je van atletiek?

Nadat, in overleg met de leerlingen, dit lijstje samengesteld is, maken ze elk ponskaarten waaruit hun beantwoording van de vragen af te lezen is.
Daarna volgt een bespreking. Allen blijken van 's avonds feesten te houden. En ook van pop- of soulmuziek. Achteraf blijkt dat men deze vragen net zo goed achterwege had kunnen laten. Wat kan wel van belang zijn? De leerlingen kiezen de eerste vraag: heb je een telefoon thuis? Waarom kan het handig zijn dit te weten? Als je een afspraak wilt maken. Als er iets gebeurd is. Bijvoorbeeld als je een lekke band hebt, dan kan je je huis opbellen. Wie vindt het erg vervelend dat hij zijn huis niet kan opbellen? Wie in Utrecht woont of wie ver-weg woont? Voor de leerlingen in Utrecht is het niet zo erg. Nu gaan we kijken:
wie woont buiten Utrecht en heeft geen telefoon?
wie woont in Utrecht en heeft geen telefoon?
wie woont buiten Utrecht en heeft wel telefoon?
wie blijven nu nog over? hoeveel zijn dat er?
Door prikken in de ponskaarten worden de antwoorden verkregen. De kaarten worden op bord boven elkaar geprikt in vier kolommen. De leerlingen maken ondertussen op grafiekenpapier een staafgrafiek van de vier gevallen. Ze zien de overeenstemming met hetgeen op bord gebeurd is.
De leerlingen zijn in groepen actief bezig. Elke groep beschikt over één volledig stel ponskaarten van alle 25 leerlingen. Het gemeenschappelijk bezig zijn wordt geleid door de lerares op zodanige manier, dat de groepen in gelijk tempo werken en dus steeds alle met dezelfde opdracht bezig zijn.
Ondertussen hebben de leerlingen veel geleerd: het relevant stellen van vraagpunten, het nut dat dit kan hebben, het begrip van wat een ponskaart is, het beantwoorden van vragen met behulp van een ponskaart, het onderscheiden van gevallen, het overzichtelijk maken van de gevonden resultaten in een staafgrafiek. En dat alles is zo ingekleed, dat het levensecht blijft. Dat laatste is van fundamenteel belang.
De tweede les is gekozen uit het project Autowegen. De lesvorm is hier een geheel andere. Weer werken de leerlingen in groepen. Maar nu werkt elke groep in zijn eigen tempo. De leerlingen hebben een opdrachtenboek dat ze nauwkeurig volgen. De lerares loopt van de ene groep naar de andere, corrigeert als men op de verkeerde weg is, helpt een handje als men niet verder kan, maar zo, dat nooit de oplossing van een probleem door de lerares gegeven wordt. Als ze vindt voldoende impulsen gegeven te hebben, loopt ze weg naar een volgende groep.
Een probleem uit dit project is het volgende. Een automobilist rijdt op een snelweg Om 12.02 krijgt hij pech. Hij is dan bij kilometerpaal 68,0. Hij belt om 12.04 een wegenwacht op die zich bij kilometerpaal 75,0 bevindt. Deze rijdt ogenblikkelijk weg en rijdt met een snelheid van 90 km per uur naar de pechvogel Zodra de reparatie verricht is, rijdt de automobilist verder. In de grafiek hieronder ziet men een en ander weergegeven. Het is de grafiek die de leerlingen

krijgen en met behulp waarvan ze vragen moeten beantwoorden. Alleen het punt *W* is hun niet gegeven, dat moeten ze zelf intekenen.
De leerlingen moeten nu een serie vragen beantwoorden.
Hoe hard reed de automobilist eerst?
Wat gebeurde er toen?



Kostelijk zijn de antwoorden: 'Hier gaat hij wel in tijd vooruit, maar gaat hij niet in km vooruit' en 'Hij rijdt niet meer, maar de tijd loopt wel verder'
Daarna moet in de grafiek de positie van de wegenwacht getekend worden op het moment dat opgebeld werd. En vervolgens de rit van de wegenwacht. Dit blijkt erg moeilijk te zijn.
Hoe laat was de wegenwacht bij de auto die met pech langs de weg staat? Hoe

lang duurde de reparatie? Met welke snelheid reed de automobilist verder? Weer een stukje voortreffelijke levensechte wiskunde. Zoals trouwens het hele project Autowegen erg de moeite waard is. Degenen die op de jaarvergadering van de NVvW geweest zijn in oktober 1977, zijn in de gelegenheid geweest van dit project een exemplaar mee naar huis te nemen.
Ik heb me ervan kunnen overtuigen dat dit groepswerk ordelijk verloopt, dat de leerlingen ijverig en geanimeerd bezig zijn. Het onderwerp pakt hen. Natuurlijk stelt het hoge eisen aan de docent, maar dat stelt elk goed onderwijs.
Tot slot een vraag die allicht bij de lezer opkomt: hoe gaat het nu verder? Aan de lessen doen mee:
mavo-4 leerlingen die wiskunde in hun pakket zullen kiezen;
mavo-4 leerlingen die geen wiskunde zullen kiezen;
lbo-leerlingen die later het C-examen willen afleggen;
lbo-leerlingen die later het B-, het A- of helemaal geen wiskunde-examen willen afleggen.
De tweede en de vierde kategorie vormen geen problemen. Maar de eerste en de derde wel. Die moeten later aan een centraal schriftelijk examen deelnemen. In de loop van de tweede klas zal men daarom van de gevolgde methode afwijken en ook wiskunde-onderwijs geven dat bestemd is voor hen die later een cse willen afleggen. Het kan geen kwaad dat ook de anderen daarmee kennismaken. Ze kunnen dan tijdig beoordelen of de keuze wiskunde wel iets of niets voor hen betekent.
In de derde klas kunnen de lbo-leerlingen die geen C-examen wensen af te leggen, terugkeren naar een voortzetting van het programma met levensechte wiskunde. De anderen moeten natuurlijk overgaan naar de normale cursus. Ook de mavo-leerlingen zullen moeten kiezen.

Ik begrijp dat velen er meer van willen weten. De brochure leerplanontwikkeling onderweg 1 (124 blz. in twee kolommen) is verkrijgbaar bij het IOWO Wie hem wil aanschaffen, stort *f* 8,– op postrekening 3105662 t.n.v. IOWO Utrecht, onder vermelding van 'L.P.O. onderweg'. Of een veelvoud van *f* 8,– en vermelding van het aantal exemplaren.
Wie bovendien de brochure Wiskunde lbo, startpunt leerplanontwikkeling wenst te ontvangen, stort *f* 2,– (of een veelvoud daarvan) extra en vermeldt '... ex. Startpunt'.

Over de meetkundige betekenis van een lineaire afbeelding

W. GANZEVOORT

In de bekende opgavenverzameling voor wiskunde I en II komt een aantal malen de vraag voor naar de meetkundige betekenis van een gegeven afbeelding. Meestal gaat het dan om goed herkenbare afbeeldingen, bijv: een rotatie gevolgd door een vermenigvuldiging vanuit 0. Maar kunnen we die vraag algemeen beantwoorden?

Zij $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ de matrix van een lineaire afbeelding t.o.v. een gegeven – meestal orthonale – basis.

We noemen dan $\det A := a_1b_2 - a_2b_1$

$\text{sp } A := a_1 + b_2$

en $\bar{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

De karakteristieke vergelijking van A is dan:

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{sp } A \cdot \lambda + \det A = 0$

Hierbij bekijken we de discriminant $D := (\text{sp } A)^2 - 4 \det A$.

We onderscheiden enkele gevallen.

a $\det A = 0$ en dan: **a1** $\text{sp } A = 0$

a2 $\text{sp } A \neq 0$

b $\det A \neq 0$ en dan: **b1** $D > 0$

b2 $D = 0$

b3 $D < 0$

a1 det $A = 0$ en sp $A = 0$

$\det A = 0 \wedge \text{sp } A = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \wedge a_1 + b_2 = 0$. Dus $b_2 = -a_1$

en $b_1 = -\dfrac{a_1^2}{a_2}$. Dan $K_A = B_A : \bar{x} = \beta\bar{a}$.

We kunnen dan schrijven: $A = V \circ R \circ P$

waarin P de projectie is evenwijdig aan $\bar{a}$ op de x_1-as,
R de draaiing is die de x_1-as afbeeldt op B_A en
V de vermenigvuldiging vanuit 0 met $\| \bar{a} \|$.

Ter controle:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1}{a_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R = \frac{1}{\| \bar{a} \|} \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \text{ en } V = \| \bar{a} \| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en $\quad V \circ R \circ P = \begin{pmatrix} a_1 & -\frac{a_1^2}{a_2} \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A.$

Wat doen we in het geval $a_2 = 0$? Wel, dan $a_1 = b_2 = 0$ en $A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
dus $A = V \circ R \circ P$ met P projectie op de x_2-as, evenwijdig aan de x_1-as,
R draaiing over $-\frac{\pi}{2}$
en V vermenigvuldiging met b_1.

a2 det $A = 0 \wedge$ sp $A = : s \neq 0$

Dan heeft A twee verschillende eigenwaarden: $\lambda = 0$ en $\lambda = s$. De bijbehorende eigenvectoren:

$K_0 = B_s : \bar{x} = \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} = : \beta \bar{b}$
$K_s = B_0 : \bar{x} = \beta \bar{a}$
Dan $A\bar{a} = s\bar{a}$ en $A\bar{b} = \bar{o}$.

Neem deze twee vectoren als basis, dan wordt de matrix van A t.o.v. die basis:
$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en dus: $A = V_s \circ P$ waarin P een projectie is evenwijdig aan K_0 op K_s.

We kunnen dus zeggen:
Elke singuliere lineaire afbeelding van $\mathbf{R}_2$ naar $\mathbf{R}_2$ is dus te beschrijven als een projectie gevolgd door een gelijkvormigheid.

b1 det $A \neq 0$ en D > 0
Dus A heeft twee verschillende eigenwaarden, ongelijk aan 0. En daarbij dan twee eigenvectoren $\bar{e}_1$ en $\bar{e}_2$. Neem die als basis.
Omdat $A\bar{e}_1 = \lambda_1\bar{e}_1$ en $A\bar{e}_2 = \lambda_2\bar{e}_2$ wordt t.o.v. die basis: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

We kunnen dan A beschrijven als een vermenigvuldiging in de $\bar{e}_1$-richting met λ_1, en één vermenigvuldiging in de $\bar{e}_2$-richting met λ_2. Hieronder vallen de lijnspiegelingen ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$).

b2 det $A \neq 0$ en D = 0

Dus A heeft één eigenwaarde λ en λ^2 = det A.
Noem $A' := V \circ A$ waarbij V een vermenigvuldiging is met $\frac{1}{\lambda}$. Dan det A' = = + 1. A' heeft dan één eigenwaarde: 1. Kies een eigenvector $\bar{e}_1$ bij $\lambda = 1$, en een tweede vector $\bar{e}_2$, zo dat $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ een orthonormale basis is. T.o.v. die basis heeft A' de matrix $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en we kunnen A' dus een afschuiving noemen.
Dan $A = V_\lambda \circ A'$.

b3 det $A \neq 0$ en D < 0

Dan kiezen we a en α zo dat $a_1 = a \cos \alpha$ en $a_2 = a \sin \alpha$.

Dan $R_{0,-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ en $R_{0,-\alpha} \circ A = \begin{pmatrix} a & b_1' \\ 0 & b_2' \end{pmatrix} = A'$

Dan det $A' = a \cdot b_2'$ = det A, maar A' heeft minstens één eigenwaarde, nl. a; de meetkundige betekenis van A' is dus bekend.

Als ik geen gevallen over het hoofd heb gezien, is hiermee de vraag naar de meetkundige betekenis van een lineaire afbeelding beantwoord, althans voor het tweedimensionale geval.
De eigenwaarden en eigenvectoren staan op de rand van het programma voor wiskunde II. Misschien dat dit stukje er toe kan bijdragen dat ze niet te ver worden weggedrongen.

Uit de tijdschriften

1. MNU (Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht)
Jahrgang 30 – Heft 8 – Dez. 1977
Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn

Dit nummer opent met een artikel, ontleend aan een voordracht gehouden te Bochum door Günter Ewald, onder de titel Das Problem des Exakten in der Geometrie.
Het artikel herinnert aan het 'weg met Euclides' van Dieudonné.
De vektorruimte en de axiomatiek waren 'in'. Tijdens een meetkundekongres in Canada echter, enkele jaren geleden, werden pamfletten uitgereikt met de leuze 'back to Euclid'.
In een viertal stellingen verdedigt de auteur:
a het behouden of weer terugbrengen in de onderbouw van het voortgezet onderwijs van de intuïtief-meetkundige methode,
b pas in de bovenbouw kunnen axioma's ingevoerd worden,
c in alle leerjaren moet begrip bijgebracht worden van exakt denken. Bij elk bewijs moeten de vooronderstellingen worden vermeld, onafhankelijk van het feit of die vooronderstellingen bewezen zijn of op aanschouwelijke wijze zijn ingevoerd,
d 'Probleem-georienteerd onderwijs' verdient de voorkeur.

De auteur citeert een interessante uitspraak van de Franse wiskundige René Thom:

Das wirkliche Problem, das sich dem Mathematik stellt, ist nicht das der Exaktheit sondern das der Entwicklung von Bedeutung. . . .
Man gelangt zu absoluter Strenge nur durch das Ausklammern der Bedeutung.

Hetzelfde nummer van MNU bericht ons het overlijden op 27 augustus 1977 van twee in de Duitse schoolwiskunde zeer bekende persoonlijkheden, namelijk Dr. GEORG WOLFF (Düsseldorf) en Dr. KUNO FLADT (Tübingen). Beide zijn ook buiten Duitsland bekend geworden door geschriften, boeken en voordrachten. Zowel het tijdschrift MNU als Praxis der Mathematik hebben veel van hun bekendheid te danken aan Georg Wolff. Kuno Fladt heeft zich vooral

laten inspireren door het werk van FELIX KLEIN. Van hem zijn o.a. bekend zijn geschriften onder de titel 'Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus'.
Georg Wolff werd 91 jaar, Kuno Fladt werd 88 jaar.

2. Wiskunde en onderwijs
Tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars
3e jaargang (1977) Nr. 12.

Dit nummer van W & O bevat een interessant artikel over Gauss van de hand van de heer Dr. H. J. M. Bos te Utrecht.
Ook dit tijdschrift heeft helaas het overlijden te melden van een wiskundige, namelijk de heer Dr. Jozef H. Leenders. Leenders is in ons land o.a. bekend door zijn boeken: 'Verzamelingen en Relaties' en 'Moderne Wiskunde met opgaven; groepen – ringen – vectorruimten – topologie'.
Deze twee boeken zijn in Euclides besproken door R. Troelstra in de 41e jaargang 1965/66.

G. Krooshof

Nederlandse Wiskunde Olympiade

In het landenklassement van de 20e Internationale Wiskunde Olympiade in Roemenië is de Nederlandse ploeg met 157 punten (uit een maximum van 240) op de 11e plaats geëindigd. De drie eerste plaatsen waren voor Roemenië (237 punten), Verenigde Staten (225) en Groot-Brittannië.

Bij de prijsuitreiking op 12 juli in Boekarest ontving *Marc van Leeuwen*, Noordweg 54, Pijnacker een tweede prijs en twee extra prijzen voor bijzonder fraaie oplossingen. Hij behaalde 33 punten. *Hans Mulder*, Petuniastraat 19, Rhenen kreeg een derde prijs voor 26 punten.
De andere deelnemers waren:
Marijn Franx, Eikenlaan 22, Nuenen (17 punten)
Frank Hoogeveen, De Savorin Lohmanstraat 147[1], Amsterdam (20)
Robert Jan Kooman, Volantruwe 10, Maastricht (16)
Rob Potting, Rijnlaan 60, Son (21)
Jan Herman Veldkamp, Venuslaan 69, Groningen (5)
Peter Wagemans, Dordtsestraatweg 643a, Rotterdam (19)

De deelnemers kunnen een eerste, een tweede of een derde prijs krijgen al naar gelang het aantal punten, dat ze behalen. Dit jaar werden bovendien vier extra prijzen uitgereikt voor bijzonder fraaie oplossingen.

Voor Nederland hadden in de Internationale Jury zitting: Dr. J. v.d. Craats, Oltmansdreef 21, Leiderdorp (tel. 071 - 89 34 58) en Drs. A. W. Boon, Burg. Caen van Necklaan 263, Leidschendam (tel. 070 - 27 25 20).

Verslag 1977/1978 Van De Voorbereidingscommissie voor de Internationale Wiskunde Olympiade

Op 14 oktober 1977 vond in het IOWO te Utrecht de prijsuitreiking plaats van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1977. De prijswinnaars waren:

1 Hans Mulder	6 Marijn Franx
2 Marc van Leeuwen	7 Rob Potting
3 Jan Herman Veldkamp	8 Wim Kernkamp
4 Peter Wagemans	9 Gerrit Boersma
5 Frank Hoogeveen	10 Robert Jan Kooman.

Zij kregen daarna een verdere begeleiding door middel van lesbrieven, mede als voorbereiding op deelname aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1978.
Ook de nrs. 11, 12 en 13 van de ranglijst: Huub Reynders, Robert Dijkgraaf en Frank Tiekink kregen lesbrieven toegestuurd.
De nrs. 1, 2, 5 en 6 waren vorig jaar ook in de prijzen gevallen. 1, 2 en 5 hebben toen alle lesbrieven doorgewerkt en aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1977 deelgenomen. Voor hen zijn 'tweedejaars'-lesbrieven gemaakt. Marijn Franx had vorig jaar 5 lesbrieven ingestuurd. Hij is dit jaar verder gegaan met de zesde. De 8 'eerstejaars'-lesbrieven zijn alleen op details gewijzigd. De onderwerpen die worden behandeld zijn:
Getallentheorie, Polynomen, Ongelijkheden, Combinatoriek, Meetkunde van het vlak en van de ruimte, Regelmatige veelvlakken, en Recursief gedefinieerde rijen.
Bij elke lesbrief worden 3 opgaven van de Internationale Wiskunde Olympiade in voorafgaande jaren gevoegd.
De 'tweedejaars'-lesbrieven die dit jaar zijn samengesteld zijn enigszins anders van karakter. Ze zijn doorgaans uitvoeriger, en er wordt dieper op de theorie ingegaan. Soms zijn bestaande stukken literatuur gekopiëerd al dan niet voorzien van een toelichting. Hier volgt een overzicht:

- Inversieve en niet-euclidische meetkunde
- Voortgezette getallentheorie; hierbij is een gedeelte gekopiëerd van het boek Aufgaben aus der Zahlentheorie van E. B. Dynkin en W. A. Uspenski (Berlin 1966)
- Groepentheorie; hierbij is gekopiëerd het boek Introduction to the Theory of Groups van P. S. Alexandroff (London, 1959)

- De constructie van de reële getallen; hierbij is een overdruk gegeven van het beroemde artikel van R. Dedekind: Stetigkeit und irrationale Zahlen, samen met een toelichting en een aantal toepassingen (middelwaardestelling, e.d.)

Bij elke lesbrief zijn Gemengde Opgaven op Olympiade-niveau gevoegd. Enige malen werden ook uitsluitend gemengde opgaven toegezonden. De Amsterdamse scholier Paul-Louis Iske vroeg in februari of hij ook lesbrieven mocht ontvangen. Hij heeft er inmiddels 4 doorgewerkt.

Het systeem van de lesbrieven brengt met zich mee dat de deelnemers alle een individuele behandeling krijgen. Het niveau van de reacties, en de snelheid waarmee gewerkt werd, was ook dit jaar weer zeer verschillend. De meest opvallende deelnemer was zonder twijfel Rob Potting. Hij werkte binnen 7 maanden alle eerstejaars- en alle tweedejaarslesbrieven door. De oplossingen die hij instuurde waren altijd correct, en vaak indrukwekkend door helderheid en eenvoud van presentatie en uitwerking. Het feit dat hij in 1976 wel aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade deelnam, maar niet voldoende punten behaalde om tot de tweede ronde te worden toegelaten moge eens te meer een aanwijzing zijn dat de waarde van de eerste ronde als middel om uitzonderlijk wiskundig talent op te sporen niet overschat mag worden. Een tweede opvallende deelnemer was nr. 10, Robert Jan Kooman. Hij werkte alle eerstejaars- en twee tweedejaarslesbrieven door. Er was een duidelijk verschil in werktempo, maar vooral ook niveau van de antwoorden met nr. 8, Wim Kernkamp. Mede omdat de puntenaantallen van de nrs. 8, 9 en 10 in de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade nauwelijks verschilden, werd Robert Jan, en niet Wim uitgenodigd deel uit te maken van de Nederlandse afvaardiging naar de Internationale Wiskunde Olympiade 1978, tezamen met de nrs. 1 t/m 7.

De acht deelnemers aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1978 (de nrs. 1 t/m 7 en nr. 10 van bovenstaande lijst) zijn op maandag 5 en dinsdag 6 juni bijeen geweest op het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Leiden. Er werd voorlichting gegeven over de gang van zaken bij de Internationale Wiskunde Olympiade, en de deelnemers maakten als voorbereiding een 'proefolympiade'. (Zie blz. 31 voor de behaalde resultaten).

J. van de Craats

Ervaringen met rekenmachientjes

Al enige tijd leeft in de redaktie van Euclides een plan om iets aan rekenmachientjes te doen. Na overleg met LBO- en AVO-leraren is besloten een themanummer uit te brengen, eventueel gevolgd door enkele artikelen in daarop aansluitende nummers.
Een diskussie rond al-of-niet invoeren van rekenmachientjes werd pas wenselijk geacht als allerlei onderwijskundige mogelijkheden tot de ervaring van diskussianten behoren! Daarom als centraal thema: leraren mogelijkheden aanreiken voor het geval hij/zij af en toe een rekenmachientje in de klas wil gebruiken. Daarbij denken we in de eerste plaats aan ervaringen van leraren in LBO, MAVO en onderbouw HAVO en VWO.
Dat juist voor het einde van het schooljaar werd aangekondigd dat rekenmachientjes in 1980 tot de toegestane hulpmiddelen bij de eindexamens gaan behoren, maakt het thema aktueel en wellicht wat minder vrijblijvend.

> Mijn dochtertje (derde klas basisschool) moet de tafeltjes leren.
> Ik gaf haar een rekenmachientje (van *f* 15) om zich te kontroleren.
> Ze drukt op [8], [×] en [7], rekent nu zelf en toetst dan = .
> Als trotse vader dacht ik niet aan alle fraudemogelijkheden die ik als achterdochtige leraar onmiddellijk doorhad!

Een reeks artikelen over rekenmachientjes zou moeten stoelen op ervaringen van leraren: in de klas eens wat geprobeerd, wel eens het gemis gevoeld, een passage uit een leerboek verhelderd gedacht door een machientje te gebruiken, of een andere ervaring.

> Oproep aan leraren om ervaringen met rekenmachientjes te melden.

We zijn blij met korte beschrijvingen. We verwachten geen persklare kopij. Als alle leraren nu denken dat hún ervaring onbelangrijk is . . . dan onthouden zij uit bescheidenheid informatie aan kollega's!
Help ons alsjeblieft, dankjewel.

Wilt u uw reaktie *vóór 1 november 1978* sturen naar:

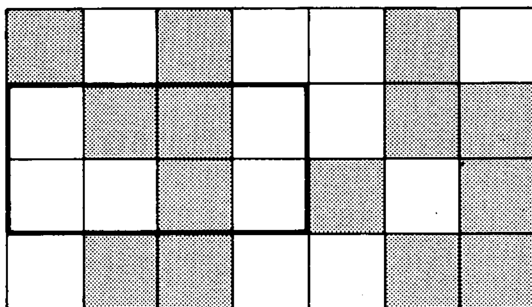
Leo Muskens De Steenen Kamer 14 5481 GD Schijndel.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Ditmaal twee opgaven uit de vijfde wiskunde olympiade uit de Verenigde Staten (4 mei 1976).

389. De velden van een schaakbord met 4 × 7 velden zijn op willekeurige wijze zwart en wit gekleurd. Bewijs dat, hoe ze ook gekleurd zijn, het altijd mogelijk is een rechthoek te kiezen (op de manier als in de figuur is aangegeven) waarvan de vier hoekvelden dezelfde kleur hebben.



390. Vind alle oplossingen van $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$

Oplossingen

387. Van de rij van Fibonacci
1 1 2 3 5 8 13 21 ...
zijn de termen met rangnummer
3, 6, 9, 12, 15, ... deelbaar door 2
4, 8, 12, 16, 20, ... deelbaar door 3
5, 10, 15, 20, 25, ... deelbaar door 5
6, 12, 18, 24, 30, ... deelbaar door 8
7, 14, 21, 28, 35, ... deelbaar door 13.
Zo gaat het door. Waarom?
We beginnen met de derde regel, schrijven de termen van de rij modulo 5 en merken op, dat $4 = -1$, $3 = -2$, $2 = -3$, $1 = -4$. De rij wordt dan
1 1 2 3 0 3 −2 1 −1 0 1 1 ...
Schrijven we de termen modulo 8, dan wordt de rij
1 1 2 3 5 0 5 −3 2 −1 1 0 ...
En modulo 13, dan
1 1 2 3 5 8 0 8 −5 3 −2 1 −1 0 ...
Het dunkt me, dat verder commentaar overbodig is.

388. *A*, *B* en *C* hebben elk een kaartenhuis gemaakt en voor zich neergezet. Ze proberen elkaars huizen kapot te schieten. De (cyclische) volgorde waarin ze schieten, wordt door het lot bepaald. Wie aan de beurt is, mag eenmaal schieten. Wiens kaartenhuis geraakt is, doet niet meer mee. *A* schiet altijd raak, de kans dat *B* raak schiet is $\frac{4}{5}$ en de kans dat *C* raak schiet $\frac{1}{2}$. Ze kiezen alle drie een optimale strategie om hun kaartenhuis zo lang mogelijk ongeraakt te doen zijn. Wie heeft de grootste kans het laatst over te blijven en hoe groot is die kans?
Zijn de drie kaartenhuizen nog intact en is *A* aan de beurt, dan zal voor hem de optimale strategie

zijn op B te mikken. En voor B op A te mikken. Zijn de drie bouwsels nog intact en komt C aan de beurt, dan is het voor hem aangewezen in de lucht te schieten. A en B proberen dan elkaar af te slachten. Mocht C een van de twee bouwsels raken, dan zal de overgeblevene op hem gaan schieten en dat is minder leuk voor hem. C wacht dus rustig, totdat het kaartenhuis van A of van B geraakt is. Plezierig voor hem is, dat hij dan zelf aan de beurt is om te schieten. Nu de kans dat hij de langst overlevende is. Onderstel A heeft B geraakt. C schiet op A en heeft een kans van 50% de laatste overgeblevene te zijn. Onderstel B heeft A geraakt, dan schiet C op B en is zijn overlevingskans $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{5})^2\frac{1}{2}+\ldots = 55{,}56\%$. De kans dat bij de loting A voor B mag schieten, is $\frac{1}{2}$. In dat geval blijft van hen tweeën A over.
De kans dat B voor A mag schieten, is $\frac{1}{2}$. In dat geval is de kans, dat A overblijft $\frac{1}{5}$ en de kans dat B overblijft $\frac{4}{5}$.
De kans dat C het laatst overblijft, is dus
$(\frac{1}{2}+\frac{1}{10})50\%+\frac{2}{5}\cdot 55{,}56\% = 52{,}22\%$.
A en B hebben stellig lagere kansen.

Boekbespreking

György Bizám, János Herczeg, *Logik macht Spass*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976, 391 blz., $ 16,00.

Dit boek is een verzameling van 85 opgaven met oplossingen. In tegenstelling tot wat de titel zou doen vermoeden, heeft dit boek niets van doen met opgaven op het gebied van de logica. Veeleer doen de opgaven een beroep op het gezonde verstand, op logisch nadenken. Bij de oplossing van de opgaven wordt geen wiskundige voorkennis vereist. 'Die Aufgaben gehen immer von leichtverständlichen Alltagssituationen aus, sind jedoch Träger eines mathematischen Gedankens, also nicht etwa Rätsel um ihrer selbst willen, sondern Probleme, bei deren Lösung der Leser einige allgemeine Wesenszüge der mathematischen Lösungswege und eine Menge gedanklicher Kunstgriffe kennenlernt, die in der Mathematik regelmässig angewendet werden.' Bij vele oplossingen weiden de schrijvers uitvoerig uit over de achtergronden van bedoelde kenmerken.
De schrijvers besteden veel aandacht aan het zo bruikbaar mogelijk maken van het boek. Zo geven zij mogelijkheden aan voor onderscheiden groepen lezers, in zekere volgorde, het boek geheel of ten dele door te werken.
Al met al een boeiend boek. Het werk is geschreven met de intentie een popularisering te geven van de wiskunde. Als zodanig is het boek naar mijn mening minder geschikt. Wel is het geschikt voor echte puzzelaars, die waarschijnlijk veel plezier aan het gebodene zullen beleven. Voor de niet-ras-puzzelaars is dit werk wellicht te taai. De aanbeveling op de omslag: 'Das Buch spricht einen grossen Leserkreis an: 14 jährige Schulkinder können so manches aus ihm lernen, und selbst Erwachsenen mit Hochschulbildung wird es Spass machen, sich über einige Lösungen den Kopf zu zerbrechen' lijkt mij dan ook tamelijk optimistisch.

W. Kleijne

Chr. Rorres, H. Anton, *Applications of Linear Algebra*, John Wiley Inc., Londen, 1977, 233 blz., £ 3.25.

De auteurs hebben de toepassing van lineaire algebra aan de orde gesteld. Een verdienstelijk plan, dat studenten een goede motivering kan geven voor hun studie van dit vakgebied.
En denk ik dan aan onze VWO-leerlingen, dan zullen niet al deze onderwerpen te behandelen zijn, al zijn er enkele die wel hun belangstelling zullen hebben. Daarbij noem ik:
Grafentheorie (Hst. 2, 15 blz.). Uit een verzameling (p_i) wordt een eindig stel geordende paren afgezonderd waartussen een gerichte relatie bestaat, die men met een vector kan duiden.
Men stelt nu een matrix op, M (m_{ij}), het element m_{ij} past dan bij p_i en p_j. Geldt $p_i \rightarrow p_j$ dan is $m_{ij} = 1$ $(i \neq j)$, $m_{ii} = 0$ en ook in alle andere gevallen. Met behulp van $M^2, M^3 \ldots$ enz., kan men dan de aantallen 2-, resp. 3-verbindingen vaststellen.

Om cliques te vinden kan men een matrix $S(s_{ij})$ ontwerpen. $s_{ii} = 0$, $s_{ij} = 1$ als $p_i \leftrightarrow p_j$, in alle andere gevallen is $s_{ij} = 0$. Aangezien voor een clique minstens drie elementen nodig zijn kan men deze met S^3 opsporen.
Tenslotte de dominante grafe. Voor elk tweetal p_i, p_j geldt:
$m_{ij} + m_{ji} = 1$ ($p_i \rightarrow p_j$ of $p_j \leftarrow p_i$). Dit zijn de zg. Tournaments.
Misschien kan ook de spelstrategie hun belangstelling hebben (hst. 3, 14 blz.). Ook Leontief economische modellen lijken me goed bruikbaar (hst. 5, 14 blz.). Tevens opgemerkt dat er bij de antwoorden van opgave 5 iets moet zijn misgegaan, i.p.v. 1121, 1546, 1555 vond ik 1250, 1448, 1556.
Tenslotte lineaire programmering, de grafische methode is al bij het VWO in gebruik. Maar de duidelijke behandeling van de Simplex methode maakt deze bruikbaar. Een kleine drukfout: het antwoord van opgave 15^4 moet zijn 22 : 13.

W. Burgers

Wolfgang Gröber, *Differentialgleichungen*,
Erster Teil Gewöhnliche Differentialgleichungen
Zweiter Teil Partielle Differentialgleichungen
Mathematik für Physiker, delen 6 en 7, tezamen 339 blz.

Hoofdstuk 1 gewone differentiaalvergelijkingen
2 lineaire vergelijkingen met analytische coëfficiënten
3 rand en eigenwaarden problemen
4 algemene diff.vergelijkingen van de eerste orde
5 enige partiële diff.vergelijkingen van de tweede orde.

H. Rommelfanger, *Differenzen und Differentialgleichungen*,
Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, deel 4, 232 blz.
Deel A, hoofdstukken 1 t/m 5 behandelt de differentie-vergelijkingen.
Deel B, de hoofdstukken 6 t/m 9 de differentiaalvergelijkingen.
De benodigde matrixrekening wordt, zonder al te diep op de theoretische achtergrond in te gaan, mede behandeld.

Herlmuth Horvath, *Rechenmethoden und ihre Anwendung in Physik und Chemie*.
De behandeling veronderstelt weinig wiskundige kennis. Men vindt: functies, complexe getallen, vectorrekening, coördinatensystemen, differentiaal- en integraalrekening, benaderingspolynomen en differentiaalvergelijkingen. Paperback, 141 blz. Wissenschaftsverlag, Bibliografische Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher.

W. Burgers

C. Goffman, *Reele Funktionen*, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich, 1976, 331 blz., DM 36.

Dit boek is een vertaling in het Duits van de in 1953 in het Engels verschenen uitgave. Het eerste gedeelte (iets meer dan de helft) is gewijd aan verzamelingen van reële getallen en aan op zulke verzamelingen gedefinieerde reële functies. Continuïteit, differentieerbaarheid en al of niet gelijkmatige convergentie van rijen en reeksen van functies spelen natuurlijk een hoofdrol. Korte hoofdstukken over ordinaalgetallen en welgeordende verzamelingen vallen iets meer buiten het gewone patroon. In het tweede gedeelte worden de maat en de integraal van Lebesgue behandeld, eerst beperkt tot het eenheidsinterval ($x : 0 \leqq x \leqq 1$) en deelverzamelingen daarvan, en dan in het laatste hoofdstuk tot deelverzamelingen van het eenheidsvierkant. Ondanks de kwaliteiten van de behandeling maken deze beperkingen het boek minder geschikt als studieboek betreffende integratietheorie.

A. C. Zaanen

Imre Lakatos, *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*, edited by John Worrall and Elie Zahar, Cambridge University Press, first published 1976, reprinted with corrections 1977, XII + 174 blz., £ 2.40.

De stelling van Euler ($Z - R + H = 2$) kan men als bolgt bewijzen:

1. neem één zijvlak weg en deformeer het overblijvende deel zo, dat het in een vlak uitgespreid wordt;
2. maak door toevoeging van diagonalen in de zijvlakken een triangulatie; bij elke nieuwe diagonaal blijft $Z - R + H$ ongewijzigd;
3. neem telkens één driehoek weg door één of twee zijden weg te nemen; ook hierbij blijft $Z - R + H$ ongewijzigd.

Ten slotte blijft één driehoek over. Daarvoor geldt $Z - R + H = 1$. Voor het veelvlak geldt dus $Z - R + H = 2$.
De juistheid van de stelling berust op de juistheid van de drie stappen (lemma's).
Tegenvoorbeelden van verschillende aard worden aangedragen. Wat kan men doen om aan de zo gerezen moeilijkheden het hoofd te bieden?

a. Zich beperken tot convexe veelvlakken. Dat is de botte bijl. Er wordt onnodig veel buiten beschouwing gelaten.
b. Bij elk tegenvoorbeeld de conditie waaraan het veelvlak moet voldoen zodanig verscherpen, dat het tegenvoorbeeld irrelevant wordt. Dat is sleutelen.
c. Bij elk tegenvoorbeeld onderzoeken met welk lemma het tegenvoorbeeld in botsing komt. Men kan nu uitgaande van de lemma's de condities waaraan het veelvlak moet voldoen, zo vaststellen, dat aan de lemma's voldaan wordt. Men gaat dan methodisch te werk.

Tegenvoorbeelden kunnen er ook toe leiden, dat een verscherpte bewijsanalyse noodzakelijk is, ten einde de verborgen lemma's op te sporen waarmee het tegenvoorbeeld in botsing komt.
Zo ontstaat een dialectisch in elkaar grijpen van bewijsanalyse en weerleggingen (proof and refutations).
Het kan ook mogelijk zijn, dat tegenvoorbeelden iemand ertoe brengen een ander bewijs van de stelling te geven met andere lemma's, waardoor het inelkaargrijpen verlegd wordt naar een ander terrein. Zodat men beter kan spreken van proofs and refutations. Dit verklaart de titel van het boek.
Men krijgt zo inzicht in het dynamische denkprocédé waarlangs wiskundige vondsten tot stand komen. Vandaar de ondertitel: the logic of mathematical discovery.
Het boek is in boeiende dialoogvorm geschreven. De inhoud ervan is rijk; bovenstaande analyse is een nog te schematische weergave van de fascinerende wijze waarop de auteur de essentie van het denken van de wiskundige weergeeft.
Men vraagt zich allicht af: wordt het axiomatisch-deductieve denken geheel buiten beschouwing gelaten? Dit komt in een tweede hoofdstuk tot zijn recht. Op verrassende manier wordt langs axiomatisch-deductieve weg de stelling van Euler bewezen met behulp van lineaire algebra. Het verband tussen eerste en tweede hoofdstuk komt m.i. niet optimaal uit de verf.
Het boek geeft geen pasklare oplossingen van de gestelde problemen, maar zet de lezer wel aanhoudend aan het denken. Gefrappeerd heeft me de opmerking: 'If you want mathematics to be meaningful, you must resign of certainty. If you want certainty, get rid of meaning.' (p. 102) Hier ligt de kern van de opvatting van de auteur.
Ik kan ieder aanraden dit boek, liefst meer dan eenmaal, te lezen.

P. G. J. Vredenduin

Olaf Hein, *Graphentheorie für Anwender*, B.I.-Hochschultaschenbücher Band 83, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1977.

In de meeste boeken over grafentheorie staan de stellingen met hun bewijzen op de voorgrond; gebruikers van grafen als ingenieurs en besliskundigen vragen echter meer om algoritmen. Het boek van Hein wil in deze behoefte voorzien. Na een korte theoretische inleiding worden algoritmen behandeld voor de belangrijkste grafenproblemen als het bepalen van samenhang, het vinden van bomen, Euler- en Hamiltoncircuits, klieken en stromen, het transport- en het toewijzingsprobleem, vaak toegelicht met praktische voorbeelden.

Het boekje (141 bladzijden in offsetdruk) kan aanbevolen worden aan ingenieurs en besliskundigen, en in het algemeen aan geïnteresseerden in een algoritmische inleiding tot de grafentheorie.

A. Schrijver

Kuno Egle, *Graphen und Präordnungen*, Mathematik für Wissenschaftler 5, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 1977.

Dit boekje, bestemd voor economen en sociale wetenschappers, bespreekt de begrippen graaf en preordening, en wel op een vrij formele manier: veel abstracte definities en weinig illustraties. Ik zou dit boek niet aanbevelen om grafentheorie uit te leren, ook niet als eerste inleiding tot het vak; voor dat doel bestaan betere boeken. Centrale begrippen als Euler- en Hamiltonpaden en kleuringen worden slechts terzijde genoemd. Voor besliskundigen belangrijke resultaten als Hall's huwelijksstelling en de 'max-flow=min-cut' stelling worden in het geheel niet behandeld. Wie echter houdt van formele inleidingen tot grafen, relaties en preordeningen (ook pregeordende topologische structuren komen uitgebreid aan de orde), begrippen die steeds meer hun weg vinden in de sociale en economische wetenschappen, zal dit boekje zeker waarderen. Het aantal pagina's is 208, in offsetdruk.

A. Schrijver

A. Solian, *Theory of Modules*, J. Wiley & Sons Ltd., London, £ 12.75.

De theorie der moduli speelt een zeer belangrijke rol in de zuivere wiskunde. Voorbeelden van modulen zijn vectorruimten, abelse groepen en ringen.
Dit boek ontwikkelt de algemene theorie der moduli tegelijk met de theorie van de categorieën en functoren. Op deze wijze is een even lijvig als abstract werk ontstaan, waarbij de graad van abstractie nog is verhoogd door het ontbreken van oefenmateriaal en niet triviale voorbeelden. Als naslagwerk in een instituutsbibliotheek kan dit boek wellicht goede diensten bewijzen. De meer concreet ingestelde particuliere aanschaffer zal er echter weinig plezier aan beleven.

M. v.d. Vlugt

Willem Kuyk, *Complementary in Mathematics, A First Introduction to the Foundations of Mathematics and its History*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston, 1977, 186 blz., *f* 40,–.

Na uitvoerige inleidingen van methodologische en van historische aard, zet de auteur in een slothoofdstuk zijn eigen opvattingen uiteen. Kern daarvan is dat het discrete en het continue twee complementaire beschouwingswijzen zijn, zoals in het complementariteitsprincipe van Bohr partikel en golfpakket twee complementaire aspecten van de materie zijn. Een ander fundamenteel gezichtspunt is dat wiskunde langs constructieve wijze tot stand komt. Wat dit wil zeggen, wordt niet precies uiteengezet. Wel wordt duidelijk dat aftelbaar oneindige processen tot de constructieve gerekend worden. Dat maakt het construeren van reële getallen (als oneindig voortlopende decimaalrijen) mogelijk.
Om niet-constructieve processen uit te kunnen sluiten, is een herziening van de axioma's van de verzamelingenleer nodig. De auteur verwerpt dan ook de ongebreidelde mogelijkheid bij een verzameling *V* de verzameling van alle deelverzamelingen te vormen. Wel kan men de verzamelingen van alle aftelbare deelverzamelingen vormen. Hij aanvaardt het keuzeaxioma, maar alleen voor aftelbaar veel verzamelingen. Zo ontstaat een wiskunde die ontdaan is van die 'hersenschimmige' bestanddelen waarover alleen nog maar op formeel-logisch sluitende wijze gesproken kan worden. Schrijvers opvattingen zijn interessant. Ze staan het dichtst bij die van L. E. J. Brouwer. Een nadere uitwerking ervan zou welkom zijn.

P. G. J. Vredenduin

Mededelingen

Instappen en toepassen

derde vooraankondiging

Onder deze titel houdt de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren op
zaterdag 28 oktober a.s.
haar jaarlijkse themadag.

Om allerlei redenen worden door leraren bij het begin van een onderwerp voorbeelden gebruikt, die soms van binnen de wiskunde soms van erbuiten komen. Naar aanleiding van die voorbeelden wordt dan een stukje wiskunde ontwikkeld.
Om allerlei redenen worden door leraren na ontwikkeling van een stukje wiskunde (praktijk)-situaties gegeven, waarop het geleerde moet worden toegepast.
Er heeft zich een spraakgebruik ontwikkeld, waarbij in het eerste geval van INSTAPPEN wordt gesproken en in het tweede van TOEPASSEN.
Op de komende themadag zal op deze begrippen nader worden ingegaan, niet op theoretische wijze, maar zo praktisch mogelijk. Als het allemaal lukt krijgen de leden van de Vereniging vóór 28 oktober een brochure toegestuurd waarin op deze problematiek en er mee samenhangende zaken wordt ingegaan.
- wat zijn de kenmerken van een instapprobleem?
- waarom toepassen?
- wat is het verband met het leerproces?
- motivatie
- wat is precies het verschil tussen een voorbeeld, een instapprobleem en een toepassing?

Op de dag zelf wordt er begonnen in navolging van het vorig jaar met een aantal probleempjes op 'leraren'-niveau. Niet alleen het oplossen van die probleempjes is dan een belangrijke aktiviteit, maar ook het gesprek met de kollega's met wie samengewerkt is over de vraag of het probleem een toepassing van al aanwezige kennis is of instap om tot een begrip, stelling, methode te komen.
Na de lunch zal Prof. dr. F. v.d. Blij in een lezing zijn visie op deze problematiek vanuit zijn werkkring (IOWO) geven.
Na deze lezing zijn er werkgroepen voor 'elck wat wils':
- doorpraten op de morgenaktiviteit
- napraten met Prof. v.d. Blij
- verder praten over de brochure
- instapproblemen en toepassingen uitwisselen en verzinnen
- ervaringen met IOWO-materiaal opdoen en uitwisselen
- ervaringen met rekenmachientjes in de klas uitwisselen (zie ook de oproep op blz. 34)
- terugblikken op Wisbrug 200.

Voor dit deel van de themadag is elke belangstellende uitgenodigd. Aan het begin en het eind van deze dag vindt voor de leden van de Vereniging het huishoudelijk deel van de jaarvergadering plaats.
In de loop van september ontvangen alle leden nog persoonlijk een uitnodiging met het programma, voorzien van een tijdsindeling.
In het oktobernummer van Euclides wordt ook deze vierde gedetailleerde aankondiging gepubliceerd.

Deze themadag vindt net als vorig jaar plaats in het gebouw van de SOL, De Uithof, Utrecht. Degenen die van plan zijn te komen en van de eenvoudige lunch gebruik wensen te maken worden verzocht uiterlijk 14 oktober *f* 7,50 over te maken op de girorekening van de Ned. Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

INHOUD

ADRESSEN AUTEURS:

W. Ganzevoort, Barbierstraat 93, 4204 TA Gorinchem.

Sieb Kemme, Leeghwaterstraat 2, 1541 LT Koog aan de Zaan.

G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, 9742 AH Groningen.

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, 6824 KJ Arnhem.